Системы линейных уравнений: основные понятия

*Система линейных уравнений* — это объединение из *n* линейных уравнений, каждое из которых содержит *k* переменных. Записывается это так:

Система линейных уравнений

Многие, впервые сталкиваясь с высшей алгеброй, ошибочно полагают, что число уравнений обязательно должно совпадать с числом переменных. В школьной алгебре так обычно и бывает, однако для высшей алгебры это, вообще говоря, неверно.

*Решение системы уравнений* — это последовательность чисел (*k*1, *k*2, ..., *kn*), которая является решением каждого уравнения системы, т.е. при подстановке в это уравнение вместо переменных *x*1, *x*2, ..., *xn* дает верное числовое равенство.

Соответственно, решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или доказать, что это множество пусто. Поскольку число уравнений и число неизвестных может не совпадать, возможны три случая:

1. Система несовместна, т.е. множество всех решений пусто. Достаточно редкий случай, который легко обнаруживается независимо от того, каким методом решать систему.
2. Система совместна и определена, т.е. имеет ровно одно решение. Классический вариант, хорошо известный еще со школьной скамьи.
3. Система совместна и не определена, т.е. имеет бесконечно много решений. Это самый жесткий вариант. Недостаточно указать, что «система имеет бесконечное множество решений» — надо описать, как устроено это множество.

Переменная *xi* называется *разрешенной*, если она входит только в одно уравнение системы, причем с коэффициентом 1. Другими словами, в остальных уравнениях коэффициент при переменной *xi* должен быть равен нулю.

Если в каждом уравнении выбрать по одной разрешенной переменной, получим набор разрешенных переменных для всей системы уравнений. Сама система, записанная в таком виде, тоже будет называться разрешенной. Вообще говоря, одну и ту же исходную систему можно свести к разным разрешенным, однако сейчас нас это не волнует. Вот примеры разрешенных систем:

Разрешенные системы уравнений

Обе системы являются разрешенными относительно переменных *x*1, *x*3 и *x*4. Впрочем, с тем же успехом можно утверждать, что вторая система — разрешенная относительно *x*1, *x*3 и *x*5. Достаточно переписать самое последнее уравнение в виде *x*5 = *x*4.

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть всего у нас *k* переменных, из которых *r* являются разрешенными. Тогда возможны два случая:

1. Число разрешенных переменных *r* равно общему числу переменных *k*: *r* = *k*. Получаем систему из *k* уравнений, в которых *r* = *k* разрешенных переменных. Такая система является совместной и определенной, т.к. *x*1 = *b*1, *x*2 = *b*2, ..., *xk* = *bk*;
2. Число разрешенных переменных *r* меньше общего числа переменных *k*: *r* < *k*. Остальные (*k* − *r*) переменных называются свободными — они могут принимать любые значения, из которых легко вычисляются разрешенные переменные.

Так, в приведенных выше системах переменные *x*2, *x*5, *x*6 (для первой системы) и *x*2, *x*5 (для второй) являются свободными. Случай, когда есть свободные переменные, лучше сформулировать в виде теоремы:

Обратите внимание: это очень важный момент! В зависимости от того, как вы запишете итоговую систему, одна и та же переменная может быть как разрешенной, так и свободной. Большинство репетиторов по высшей математике рекомендуют выписывать переменные в лексикографическом порядке, т.е. по возрастанию индекса. Однако вы совершенно не обязаны следовать этому совету.

Теорема. Если в системе из *n* уравнений переменные *x*1, *x*2, ..., *xr* — разрешенные, а *xr*+ 1, *xr*+ 2, ..., *xk* — свободные, то:

1. Если задать значения свободным переменным (*xr*+ 1 = *tr*+ 1, *xr*+ 2 = *tr*+ 2, ..., *xk* = *tk*), а затем найти значения *x*1, *x*2, ..., *xr*, получим одно из решений.
2. Если в двух решениях значения свободных переменных совпадают, то значения разрешенных переменных тоже совпадают, т.е. решения равны.

В чем смысл этой теоремы? Чтобы получить все решения разрешенной системы уравнений, достаточно выделить свободные переменные. Затем, присваивая свободным переменным разные значения, будем получать готовые решения. Вот и все — таким образом можно получить все решения системы. Других решений не существует.

Вывод: разрешенная система уравнений всегда совместна. Если число уравнений в разрешенной системе равно числу переменных, система будет определенной, если меньше — неопределенной.

# Метод Гаусса

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если множество всех их решений совпадает.

*Элементарные преобразования* системы уравнений — это:

1. Вычеркивание из системы тривиальных уравнений, т.е. таких, у которых все коэффициенты равны нулю;
2. Умножение любого уравнения на число, отличное от нуля;
3. Прибавление к любому *i*-му уравнению любого *j*-то уравнения, умноженного на любое число.

Переменная *xi* называется *свободной*, если эта переменная не является разрешенной, а вся система уравнений — является разрешенной.

Теорема. Элементарные преобразования переводят систему уравнений в равносильную.

Смысл метода Гаусса заключается в том, чтобы преобразовать исходную систему уравнений и получить равносильную разрешенную или равносильную несовместную систему.

Итак, метод Гаусса состоит из следующих шагов:

1. Рассмотрим первое уравнение. Выберем первый ненулевой коэффициент и разделим все уравнение на него. Получим уравнение, в которое некоторая переменная *xi* входит с коэффициентом 1;
2. Вычтем это уравнение из всех остальных, умножая его на такие числа, чтобы коэффициенты при переменной *xi* в остальных уравнениях обнулились. Получим систему, разрешенную относительно переменной *xi*, и равносильную исходной;
3. Если возникают тривиальные уравнения (редко, но бывает; например, 0 = 0), вычеркиваем их из системы. В результате уравнений становится на одно меньше;
4. Повторяем предыдущие шаги не более *n* раз, где *n* — число уравнений в системе. Каждый раз выбираем для «обработки» новую переменную. Если возникают противоречивые уравнения (например, 0 = 8), система несовместна.

В результате через несколько шагов получим либо разрешенную систему (возможно, со свободными переменными), либо несовместную. Разрешенные системы распадаются на два случая:

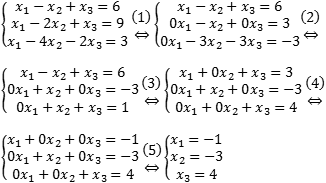
1. Число переменных равно числу уравнений. Значит, система определена;
2. Число переменных больше числа уравнений. Собираем все свободные переменные справа — получаем формулы для разрешенных переменных. Эти формулы так и записываются в ответ.

Вот и все! Система линейных уравнений решена! Это довольно простой алгоритм, и для его освоения вам не обязательно обращаться к репетитору высшей по математике. Рассмотрим пример:

Задача. Решить систему уравнений:

Система линейных уравнений

Решение:



Описание шагов:

1. Вычитаем первое уравнение из второго и третьего — получим разрешенную переменную *x*1;
2. Умножаем второе уравнение на (−1), а третье уравнение делим на (−3) — получим два уравнения, в которых переменная *x*2 входит с коэффициентом 1;
3. Прибавляем второе уравнение к первому, а из третьего — вычитаем. Получим разрешенную переменную *x*2;
4. Наконец, вычитаем третье уравнение из первого — получаем разрешенную переменную *x*3;
5. Получили разрешенную систему, записываем ответ.

*Общее решение* совместной системы линейных уравнений — это новая система, равносильная исходной, в которой все разрешенные переменные выражены через свободные.

Когда может понадобиться общее решение? Если приходится делать меньше шагов, чем *k* (*k* — это сколько всего уравнений). Однако причин, по которым процесс заканчивается на некотором шаге *l* < *k*, может быть две:

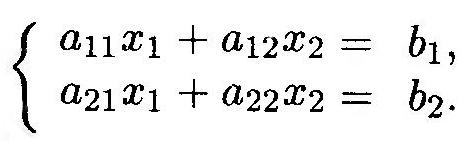
1. После *l*-го шага получилась система, которая не содержит уравнения с номером (*l* + 1). На самом деле это хорошо, т.к. разрешенная система все равно получена — даже на несколько шагов раньше.
2. После *l*-го шага получили уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны нулю, а свободный коэффициент отличен от нуля. Это противоречивое уравнение, а, следовательно, система несовместна.

Важно понимать, что возникновение противоречивого уравнения по методу Гаусса — это достаточное основание несовместности. При этом заметим, что в результате *l*-го шага не может остаться тривиальных уравнений — все они вычеркиваются прямо в процессе.

# Метод Крамера

## Правило Крамера решения систем n – линейных уравнений с n – неизвестными.

Рассмотрим систему 2 ‒ х линейных уравнений с 2 ‒ мя неизвестными:



Решим эту систему методом подстановки:

Из первого уравнения следует:

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-o52Qyp.png

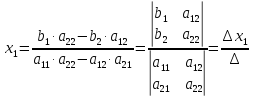
Подставив во второе уравнение, получим:

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-jO90Zf.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-hkVzN_.png

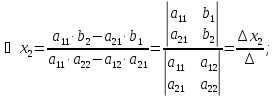
https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-QP0MIK.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-ShoRps.png



Подставляем значение https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-W6QEKP.pngв формулу дляhttps://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-uu7IU3.png, получим:

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-cQvq6c.png= https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-1CKnmK.png



Определитель Δ — определитель матрицы системы;

Δ *x*1— определитель переменной *x*1;

Δ *x*2— определитель переменной *x*2;

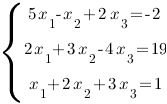
## Формулы:

*x*1 =https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-0H_8Zg.png;*x*2 =https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-QYXfiJ.png;…,*x*n = https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-RNp4lA.png;Δ ≠ 0;

‒ называются *формулами Крамера.*

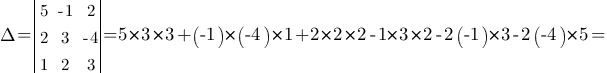
При нахождении определителей неизвестных *х1, х2,…, хn*заменяется столбец коэффициентов при той переменной, определитель которой находят, на столбец свободных членов.

**Пример:**Решить систему уравнений методом Крамера



**Решение:**

Составим и вычислим сначала главный определитель этой системы:

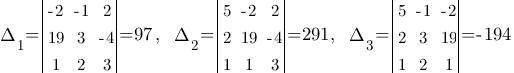


https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-Z5IIsB.png

Так как Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-8GL_hv.png

где Δ 1, Δ 2, Δ 3получаются из определителя Δ путем замены 1‒ го, 2 ‒ го или 3 ‒ го столбца, соответственно, на столбец свободных членов.



Таким образом:

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-ZFP33V.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_mo_RGRBc2h.qbdE/img-jBZJJY.png